|  |
| --- |
| ***MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN*** |

***1.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN***

Trước hết, ta xác định, - là không gian xác suất; là không gian đo; T là tập chỉ số; từ đó, ta xác định quá trình ngẫu nhiên như sau.

* + 1. ***Định nghĩa***

*Quá trình ngẫu nhiên , là họ các đại lượng ngẫu nhiên xác định trên cùng một không gian xác suất, và nhận giá trị trong không gian :*

*.*

***Chú ý****:*

* Quá trình ngẫu nhiên thường được ký hiệu bởi ; hoặc . Khi không sợ lầm lẫn, ta chỉ viết đơn giản là hoặc .
* Trong định nghĩa trên, được gọi là không gian xác suất của quá trình ngẫu nhiên Không gian đo được gọi là không gian mẫu (sample space) ; được gọi là không gian pha hay còn gọi là không gian trạng thái(state space).
* Nếu cố định , ta sẽ thu được một đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian pha. Nếu cố định ta sẽ thu được hàm của biến t, ta gọi đó là hàm chọn hoặc còn gọi là quỹ đạo của quá trình, tương ứng với khi đó ta ký hiệu nó bởi:

***1.1.2. Bộ lọc của quá trình ngẫu nhiên***

* Bộ lọc trên là họ hàm không giảm của:đại số

.

Ta ký hiệu ;

* Lọc sinh bởi quá trình ngẫu nhiên , được ký hiệu là:

.

* Một không gian xác suất trên đó người ta gắn thêm vào bộ lọc được gọi là không gian xác suất được lọc và ký hiệu là .

***1.1.3. Phân loại các quá trình ngẫu nhiên***

Ta có thể phân loại quá trình ngẫu nhiên theo thời gian và trạng thái thành bốn loại sau:

1. *Trạng thái và thời gian đều rời rạc*: Khi đó và T đều là các tập rời rạc.
2. *Trạng thái rời rạc còn thời gian liên tục.* Khi đólà tập rời rạc còn T là môt khoảng .
3. *Trạng thái và thời gian đều liên tục.* Khi đó và T đều là các khoảng.
4. *Trạng thái liên tục và thời gian rời rạc.* Khi đó là khoảng và T là tập rời rạc.

Ta còn có thể phân loại quá trình ngẫu nhiên theo các đặc tính của quá trình, ví dụ như quá trình Markov hoặc quá trình dừng.

***1.1.4. Phân phối hữu hạn chiều của quá trình ngẫu nhiên***

***Định nghĩa:*** *Phân phối hữu hạn chiều (của quá trình ngẫu nhiên X(t)) là phân phối của vectơ ngẫu nhiên với mọi k nguyên dương và mọi thời gian tùy ý ():*

***Các tính chất của phân phối hữu hạn chiều:***

1. Với mọi hoán vị của các số 1,2,…,k; mọi là các tập Borel trong miền giá trị của quá trình ngẫu nhiên, và , ta có:

(Tính chất này được gọi là *tính đối xứng*).

1. Với mọi là các tập Borel trong miền giá trị của quá trình ngẫu nhiên và , ta có

(Tính chất này được gọi là *tính nhất quán*).

|  |
| --- |
| ***MỘT SỐ LỚP CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN THƯỜNG GẶP*** |

* 1. ***QUÁ TRÌNH WIENER*** *(hay còn gọi là Chuyển động Brown).*

***2.1.1. Định nghĩa****: Quá trình ngẫu nhiên được gọi là quá trình Wiener (hay còn gọi là chuyển động Brown) nếu các điều kiện sau được thỏa:*

* *Với mọi các số gia ;là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.*
* *Nếusố gia có phân phối chuẩn*
* *Hầu hết các quỹ đạo của là hàm liên tục.*

Khi , ta gọi đó là quá trình Wiener tiêu chuẩn (chuyển động Brown tiêu chuẩn) và ký hiệu nó là:

***2.1.2. Một số tính chất của quá trình Wiener***

* ***Chuyển động Brown là một quá trình Gauss***

Thật vậy, phân phối của véctơ ngẫu nhiên với là phân phối chuẩn, do các thành phần của nó là biến đổi tuyến tính của các đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn là .

* ***Quá trình Wiener là một quá trình Markov***

Quá trình ngẫu nhiên với số gia độc lập là quá trình Markov, mà theo định nghĩa trên ta thấy quá trình Wiener là quá trình ngẫu nhiên với số gia độc lập, do đó, quá trình Wiener là một quá trình Markov.

* ***Kỳ vọng và hàm hiệp phương sai*** *của chuyển động Brown sẽ là:*

1. *(2.1.1)*
2. *, nếu s<t. (2.1.2)*

Thật vậy, khi s < t, ta có:

* ***Hàm mật độ phân phối của,* với**

(2.1.3)

Hàm mật độ có điều kiện, với sẽ là:

(2.1.4)

* ***Tính phản xạ***

Nếu là chuyển động Brown tiêu chuẩn (với ), khi đó cũng vậy, nghĩa là nó cũng là chuyển động Brown tiêu chuẩn. Tính chất này suy từ tính đối xứng của phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng không*.*

* ***Độ đo Wiener tiêu chuẩn n-chiều***

Cho: ;

Trong đó

* ***Các momen của chuyển động Brown***

*;*

* ***Tính không đâu khả vi của W(t)***

Với mọi , ta có: .

Chứng minh: Cho x > 0 xác định, khi đó sử dụng tính chất chuẩn của thể hiện qua (2.1.3), ta sẽ có:

và xác định. Từ đó suy ra quá trình Wiener không khả vi với xác suất bằng 1, với mọi

* ***Tổng bình phương các số gia của quá trình Wiener tiêu chuẩn ứng với phân hoạch ; hội tụ đến (b-a) theo bình phương trung bình, nghĩa là:***

(2.1.5)

***Chứng minh:***

Ta có:

.

Do tính độc lập của

Vậy khi ta sẽ có .

Từ đó:

khi

* 1. ***MỘT SỐ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN LIÊN QUAN ĐẾN CHUYỂN ĐỘNG BROWN***

***2.2.1. Cầu Brown*** *(Brownian bridge)* là quá trình ngẫu nhiên có dạng:

.

; nếu t,s .

***2.2.2. Chuyển động Brown trôi dạt*** *(Brownian motion with drift)* là quá trình ngẫu nhiên có dạng:

.

Trong trường hợp này, được gọi là hệ số chuyển dịch, và được gọi là hệ số khuếch tán.

* + 1. ***Chuyển động Brown hình học*** *(Geometric Brownian motion),*

Chuyển động Brown hình học là quá trình ngẫu nhiên có dạng:

.

Chuyển động Brown hình học có phân phối lôga chuẩn, với hàm mật độ tương ứng xác định bởi:

.

Chuyển động Brown hình học là một quá trình Markov thuần nhất theo thời gian.

* Kỳ vọng:

.

* Phương sai:

Var.

* + 1. ***Chuyển động Brown tích phân*** *(Integrated Brownian motion).*

Quá trình ngẫu nhiên có dạng:

được gọi là chuyển động Brown tích phân.

Chuyển động Brown tích phân là một quá trình Gaussvới kỳ vọng bằng không và phương sai bằng:

***2.2.5. Chuyển động Brown phản xạ***

Cho là chuyển động Brown tiêu chuẩn. Khi đó quá trình ngẫu nhiên:

được gọi là chuyển động Brown phản xạ.

* Từ đó ta sẽ có kỳ vọng:
* Phương sai:

.

***2.3. TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN ITÔ***

***2.3.1. Định nghĩa***

Cho  là một quá trình ngẫu nhiên và  là chuyển động Brown tiêu chuẩn (một chiều), tất cả quỹ đạo của  và là xác định trên đoạn . Xét phân hoạch của đoạn [a,b] :

Lập tổng của tích phân: 

Trong đó: là giá trị của tại đúng đầu mút bên trái của đoạn .

Ta là xét các phân hoạch sao cho mọi khoảng  đều thu nhỏ dần tới không: 

Khi đó tồn tại một biến ngẫu nhiên  sao cho:



thì  được gọi là tích phân Itô của quá trình  trên đoạn và ký hiệu là:



Giới hạn của  là giới hạn theo nghĩa bình phương trung bình của  và ký hiệu là 

Tích phân Itô của quá trình ngẫu nhiên  là giới hạn theo nghĩa bình phương trung bình

***1.3.2. Tính chất của tích phân Itô***

* Tính chất tuyến tính: 
* Kỳ vọng bằng không:



* Đẳng cự Itô:
* Kỳ vọng tích:



***Ví dụ:*** Dùng định nghĩa để tính tích phân ; trong đó là quá trình Wiener tiêu chuẩn.

Trước hết ta xét các tổng

Từ đó ta sẽ có

Cộng và trừ vế với vế các hệ thức trên với nhau ta sẽ thu được

Mặt khác theo tính chất của tổng bình phương các số gia của quá trình Wiener tiêu chuẩn, ta sẽ suy ra:

Điều đó chứng tỏ rằng theo định nghĩa về tích phân Itô ta sẽ có

***2.4. VI PHÂN NGẪU NHIÊN ITÔ***

***2.4.1. Công thức vi phân ngẫu nhiên Itô*** *(Công thức Itô)*

***Định nghĩa:*** Ta nói rằng quá trình ngẫu nhiên  có vi phân Itô:



nếu :



***Công thức Itô:*** Nếu là quá trình ngẫu nhiên có vi phân Itô và  là hàm một lần khả vi theo t, hai lần khả vi theo , khi đó quá trình ngẫu nhiên  có vi phân Itô tính theo công thức sau:

|  |
| --- |
|  |
|  |

 (5.1.1)

* ***Ví dụ 1 :*** Cho  là quá trình ngẫu nhiên xác định bởi .

Hãy xác định vi phân ngẫu nhiên Itô cho .

***Hướng dẫn giải:*** Từ biểu thức của ta thấy rằng mặt khác quá trình có vi phân Itô là nghĩa là

 ;

Với ta sẽ có:

;

Áp dụng công thức Itô ta được :

***2.4.2. Định lý Vi phân cho tích và thương***

*Cho  là các quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị dương, có các vi phân ngẫu nhiên tương ứng:*

* ;*

**

*Khi đó, với mọi  ta sẽ có:*

 (5.1.2)

 (5.1.3)

*trong đó*  *và* 

***Chứng minh:***

Trước hết, từ hệ thức (5.1.1) ta sẽ có:

trong đó:  (5.1.4)

Tương tự, đối với  ta cũng sẽ có:



trong đó:  (5.1.5)

Mặt khác, từ các nhận xét:

 (5.1.6)





Sử dụng công thức Itô, sẽ thu được:





Đặt các biểu thức vừa thu được vào (5.1.6), ta có:



 (5.1.7)

Đặt  đã xác định trong (5.1.4) và (5.1.5) vào (5.1.7) ta sẽ thu được đẳng thức cần chứng minh.

Tiếp theo ta chứng minh hệ thức (5.1.3), trước hết xét (5.1.2) cho hàm 

Áp dụng hệ thức (5.5) ta thu được





Khi cho , ta sẽ có hệ quả sau:

***Hệ quả***

*Cho  là các quá trình có các vi phân ngẫu nhiên tương ứng:*

* ; *

*Khi đó, ta sẽ có:*

**

*** .***

***Ví dụ 2.*** Cho  là các quá trình có các vi phân ngẫu nhiên tương ứng là:

Hãy tìm vi phân tích và vi phân thương của và

Áp dụng công thức trong hệ quả nêu trên ta sẽ có:

* 1. ***QUÁ TRÌNH POISSON***

***2.4.1. Định nghĩa***

*Quá trình ngẫu nhiên được gọi là quá trình ngẫu nhiên Poisson với cường độ nếu nó thỏa các điều kiện sau:*

1. *, h.c.*
2. *là quá trình có số gia độc lập.*
3. *Mỗi số gia có phân phối Poisson với tham số λ(t-s), nghĩa là*

*.*

1. *Hầu hết các quỹ đạo của là hàm nhận các giá trị nguyên không âm, không giảm với các bước nhảy bằng 1.*

***2.4.2. Các hàm số đặc trưng của quá trình Poisson***

* *Kỳ vọng : ; Moment bậc hai: .*
* *Phương sai: D*
* *Hàm tương quan: λ min(s,).*

Chứng minh: Trước hết ta có nhận xét, nếu lấy

Mặt khác ta biết rằng:

Từ đó suy ra,

λ min(s,).

***2.4.3. Tổng các quá trình Poisson độc lập***

*Cho là k quá trình Poisson độc lập tương ứng với các cường độ ; và . Khi đó ta sẽ có là một quá trình Poisson với cường độ bằng: .*

***Chứng minh:***

Trước hết, ta có nhận xét: Với

ta sẽ có các số gia,

là các số gia dừng và độc lập.

Mặt khác, với mọi t dương, cố định, ta sẽ thu được:

P

(trong đó ).

* + 1. ***Qúa trình ngẫu nhiên Poisson phức hợp (còn gọi là quá trình Poisson đa hợp)***

Cho là dãy các đại lượng ngẫu nhiên bình phương khả tích, độc lập, có cùng phân phối , và một quá trình Poisson độc lập với chúng . Ta có liên hệ:

***Định nghĩa****: Quá trình ngẫu nhiên xác định bởi tổng:*

*được goi là quá trình ngẫu nhiên Poisson phức hợp.*

***Các tính chất của quá trình ngẫu nhiên Poisson phức hợp***

* *Với mọi , ta luôn có:*

(2.4.1)

Chứng minh: Vì có phân phối Poisson với tham số t > 0 và độc lập với nên, với mọi , ta thu được:

.

Đẳng thức cuối được thỏa vì là phân phối xác suất của nên:

* Mở rộng tính chất (3.3.1), ta sẽ thu được tính chất sau:

Với mọi và , ta sẽ có:

(2.4.2)

* *Kỳ vọng của quá trình Poisson phức hợp.*

Theo tính chất của hàm đặc trưng ta có:

* *Phương sai của quá trình Poisson phức hợp.*

Sử dụng tính chất của hàm đặc trưng và tính chất của phương sai, ta sẽ có:

* *Quá trình Poisson bù phức hợp (còn gọi là quá trình Poisson bù đa hợp)*

Quá trình bù Poisson phức hợp được định nghĩa bởi:

***2.4.5 Qúa trình ngẫu nhiên Poisson không thuần nhất***

***Định nghĩa****: Quá trình đếm với số gia độc lậpđược gọi là quá trình ngẫu nhiên Poisson không thuần nhất với hàm cường độ luôn dương, nếu nó thỏa các điều kiện sau:*

*Chú ý*: Khi (hằng số dương) thì quá trình này là quá trình ngẫu nhiên Poisson thuần nhất với cường độ

***Tính chất*:** *Cho là quá trình ngẫu nhiên Poisson không thuần nhất với hàm cường độ khi đó sẽ có hàm cường độ bằng , trong đó: h.*

***Chứng minh***: Đặt

Sử dụng tính chất số gia độc lập:

Từ đó, ta sẽ thu được:

(2.4.3)

Chia hai vế cho và tìm giới hạn khi dần về 0, ta có:

Coi s là hằng số trong phương trình trên, ta có nghiệm dưới dạng:

.

Với điều kiện , ta có ,

(2.4.4)

Sử dụng (2.4.3) và (2.4.4), ta sẽ được:

(2.4.5)

Ta viết lại (2.4.5) dưới dạng sau:

Giải phương trình vi phân trên với điều kiện , ta được:

Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ đi đến nghiệm:

***2.5 LỚP QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN LEVY***

***2.5.1. Định nghĩa***

*Quá trình ngẫu nhiên , được gọi là quá trình Levy nếu nó thỏa các tính chất sau:*

1. *là quá trình ngẫu nhiên với số gia độc lập, nghĩa là với mọi cách chọn*

*, các đại lượng ngẫu nhiên:*

*là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.*

1. *là liên tục ngẫu nhiên, nghĩa là với mọi và với mọi ta có*

1. *có giới hạn trái khi , và liên tục phải khi*
2. *Phân phối của không phụ thuộc vào s (hay còn gọi là có số gia dừng theo thời gian).*

Tóm lại, quá trình Levy là quá trình ngẫu nhiên liên tục có số gia dừng và độc lập. Rõ ràng, chuyển động Brown tiêu chuẩn trong  là một quá trình Lévy. Quá trình này mang tên của nhà Toán học người Pháp Paul-Lévy (1886-1971) là người đã tìm ra lí thuyết mới của quá trình ngẫu nhiên như martingan, phương pháp Lévy. Quá trình Poisson và quá trình Wiener là hai ví dụ về quá trình Lévy.

***2.5.2. Tính khả phân vô hạn***

***Tính chất:*** *Nếu quá trình ngẫu nhiên là quá trình Levy, khi đó với mọi t > 0, phân phối của là phân phối khả phân vô hạn.*

Chứng minh: Với mọi n nguyên, dương ta có thể biểu diễn dưới dạng:

(2.5.1)

trong đó,

Mặt khác, các đại lượng ngẫu nhiên:

;

là các số gia độc lập của quá trình Levy . Nói một cách khác, (4.1.1) cho ta thấy với mọi n nguyên, dương, đều phân tích được dưới dạng tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, vậy nó là một phân phối khả phân vô hạn.

***Chú ý:*** Lớp các phân phối khả phân vô hạn là một lớp khá rộng gồm nhiều phân phối thường gặp trong lý thuyết xác suất như: phân phối chuẩn; phân phối Cauchy; phân phối Poisson; phân phối hình học; phân phối nhị thức; phân phối gamma,….Từ đó chúng ta đã thấy được một tính chất lý thú của lớp các quá trình Levy qua định lý nêu trên.

***2.5.3. Công thức Levy - Khintchine***

*Cho là quá trình Levy, khi đó hàm đặc trưng của nó sẽ có dạng:*

(2.5.2)

trong đó hàm xác định bởi:

Trong đó,

* *Các tham số và là những hằng số,*
* *ν = νlà độ đo hữu hạn trên ℬ, thỏa điều*

*kiện.*

Độ đo ta nói ở phần trên được gọi là *độ đo Levy.* Hàmxác định trong (2.5.2) được gọi là *đặc trưng mũ* của quá trình Levy

***2.5 LỚP QUÁ TRÌNH ITÔ-LEVY***

***2.5.1 Định nghĩa:*** *Quá trình ngẫu nhiên Itô - Levy là quá trình có dạng:*

(2.5.3)

*trong đó là quá trình Wiener tiêu chuẩn và độ đo Poisson bù thỏa điều kiện:*

*; h.c.*

Dạng biểu diễn (2.5.3) sẽ tương đương với dạng biểu diễn *vi phân Itô - Levy*  sau:

(2.5.4)

Nếu , ta sẽ gọi là quá trình Itô-Levy dạng thuần nhảy.

* + 1. ***Định lý*** (*Về vi phân tích của các quá trình Itô – Levy*)

Cho hai quá trình Itô – Levy xác định bởi;

trong đó:

và chúng thỏa điều kiện trong định nghĩa về quá trình Itô - Levy, khi đó ta sẽ có:

trong đó là vết của ma trận .

* ***Hệ quả*:**

Cho hai quá trình Ito - Levy một chiều, với

ta sẽ có:

* + 1. ***Phương trình vi phân tuyến tính Itô-Levy***

*Phương trình vi phân tuyến tinh Itô - Levy là phương trình có dạng:*

*dX(t)*

(2.5.5)

*Với điều kiện ban đầu, trong đó:*

*và thỏa các điều kiện:*

Khi ; ta gọi đó là quá trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất, hoặc còn gọi là phương trình vi phân ngẫu nhiên hình học.

* ***Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tinh thuần nhất***

*Cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất, có dạng:*

(2.5.6)

*Với điều kiện ban đầu trong đó:*

*và thỏa điều kiện:*

*khi đó nghiệm của phương trình* (2.5.6) *sẽ được cho bởi hệ thức sau*

(2.5.7)

* ***Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính Itô-Levy***

Từ nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất (2.5.7) bằng phương pháp tách nghiệm ta sẽ suy ra nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính Itô-Levy (2.5.5) dưới dạng sau

+

trong đó xác định bởi (2.5.7).

Chứng minh các kết quả nêu trên có thể xem trong các tài liệu

1. ***Dương Tôn Đảm****,**Quá trình ngẫu nhiên. Phần II – Các phép toán Malliavin,*

*53-63,* NXB Đại học Quốc gia TP HCM, 2010.

1. ***Dương Tôn Đảm****,**Lớp quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy và ứng dụng, 68-72,*

NXB Đại học Quốc gia TP HCM, 2015.